

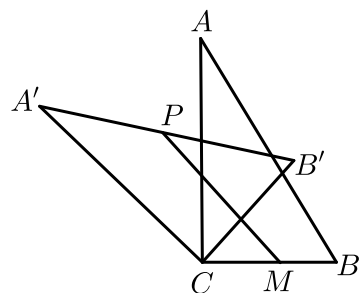
第1讲 旋转中的最值问题练习

一、绕某点运动问题

练习1

1. 2017~2018学年3月江苏苏州苏州市振华中学校初三下学期月考第9题3分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕顶点 C 逆时针旋转得到 $\triangle A'B'C$ ， M 是 BC 的中点， P 是 $A'B'$ 的中点，连接 PM 。若 $BC = 2$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，则线段 PM 的最大值是（ ）。



A. 4

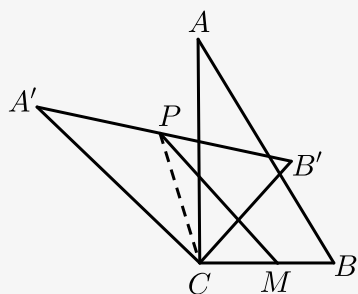
B. 3

C. 2

D. 1

【答案】B

【解析】如图连接 PC 。



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\because \angle A = 30^\circ, BC = 2,$

$\therefore AB = 4,$

根据旋转不变性可知，

$A'B' = AB = 4,$

$\therefore A'P = PB',$

$\therefore PC = \frac{1}{2}A'B' = 2,$

$\because CM = BM = 1,$

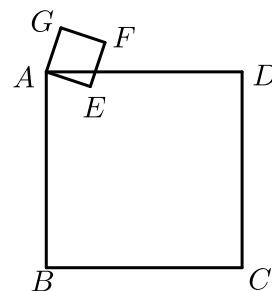
又 $\because PM \leq PC + CM$ ，即 $PM \leq 3$ ，

$\therefore PM$ 的最大值为 3 (此时 P 、 C 、 M 共线) .

【标注】【知识点】利用三边关系求最值

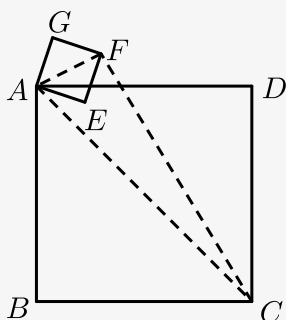
2. 2017~2018 学年天津红桥区初三上学期期中第 17 题 3 分 ★★

如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4cm, 正方形 $AEFG$ 的边长为 1cm. 如果正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转, 那么 C 、 F 两点之间的最小距离是 _____ cm .



【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】 连接 AF 、 AC 、 CF , 如图,



$\because$ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $AEFG$ 的边长分别为 4cm, 1cm,

$\therefore AC = 4\sqrt{2}\text{cm}$, $AF = \sqrt{2}\text{cm}$,

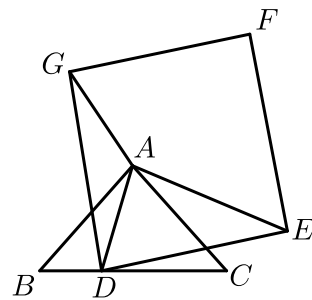
$\therefore CF \geq AC - AF$ (当点 A 、 F 、 C 共线时, 取等号),

$\therefore CF$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\text{cm}$.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

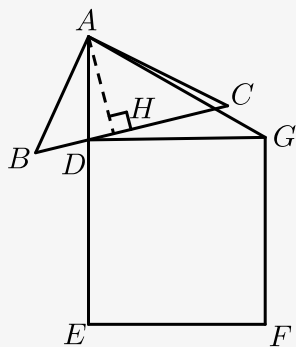
3. 2019 年浙江台州椒江区书生中学初三中考二模第 16 题 5 分 ★★★

如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 6$, D 为 BC 边一点, 且 $BD : DC = 1 : 2$, 以 D 为一个顶点作正方形 $DEFG$, 且 $DE = BC$, 连接 AE , 将正方形 $DEFG$ 绕点 D 旋转一周, 在整个旋转过程中, 当 AE 取得最大值时 AG 的长为 _____ .



【答案】 $2\sqrt{23}$

【解析】 如图，



当 A 、 D 、 E 三点在同一直线上，且点 D 在线段 AE 上时， AE 最大，

此时 $\angle ADG = 180^\circ - \angle ADE = 90^\circ$ ，

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 6$ ，

由勾股定理得 $BC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ ，

$\because DE = BC$ 且四边形 $DGFE$ 为正方形，

$\therefore DE = DG = GF = FE = 6\sqrt{2}$ ，

$\because BD : DC = 1 : 2$ ，

$\therefore BD = \frac{1}{3}BC = 2\sqrt{2}$ ， $DC = \frac{2}{3}BC = 4\sqrt{2}$ ，

作 $AH \perp BC$ 于点 H ，

则 $AH = HB = HC = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore DH = BH - BD = \sqrt{2}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AHD$ 中， $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = 2\sqrt{5}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADG$ 中， $AG = \sqrt{AD^2 + DG^2} = 2\sqrt{23}$ 。

【标注】 【知识点】 正方形的性质

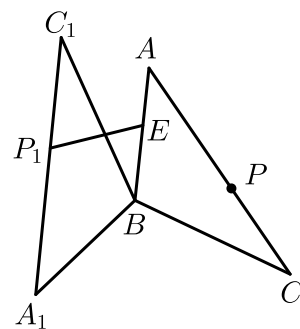
【知识点】 旋转的性质

【知识点】 旋转性质综合应用

【能力】 推理论证能力

4. ★★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A < 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ， E 为 AB 的中点， P 为 AC 边上一动点，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 α 角 ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$) 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，点 P 的对应点为 P_1 ，连 EP_1 ，在旋转过程中，线段 EP_1 的长度的最大值是 ()。



A. $\sqrt{3} + 1$

B. 8

C. $\frac{13}{2}$

D. 6

【答案】 B

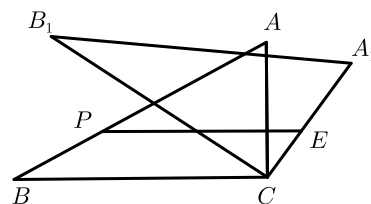
【解析】 E 为 AB 的中点， P_1 为动点，当 P 在 C 处时， EP_1 最长。

在旋转过程中， E 、 B 、 P 共线时， EP_1 最大为 8。

【标注】 【知识点】 旋转性质综合应用

5. 2020~2021 学年 3 月四川成都金牛区成都外国语学校初二下学期月考第 25 题 4 分 ★★

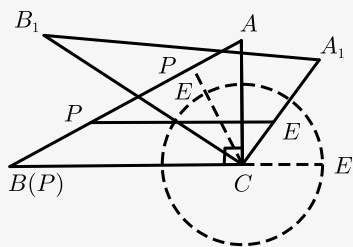
如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 8$ ，点 P 是线段 AB 上一动点。将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转，得到 $\triangle A_1B_1C_1$ 。点 E 是 A_1C 上一点，且 $A_1E = 4$ ，则 PE 长度的最小值与最大值的和为 _____。



【答案】 $12\sqrt{3}$

【解析】 $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 8$ ，

$\therefore BC = 8\sqrt{3}$ ，



$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转，得到 $\triangle A_1B_1C$ ，
 $\therefore AC = A_1C = 8$ ，且 $A_1E = 4$ ，
 $\therefore CE = 4$ ，
 $\therefore$ 点 E 在以 C 为圆心， CE 为半径的圆上，
 如图，当点 C ，点 E ，点 P 共线，且 $PC \perp AB$ 时， PE 长度最小，
 $\therefore PC \perp AB$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，
 $\therefore PC = \frac{1}{2}BC = 4\sqrt{3}$ ，
 $\therefore PE$ 最小值为 $4\sqrt{3} - 4$ ，
 当点 P 与点 B 重合，且点 E 在 PC 的延长线上时， PE 长度最大，
 $\therefore PE$ 最大值为 $8\sqrt{3} + 4$ ， $4\sqrt{3} - 4 + 8\sqrt{3} + 4 = 12\sqrt{3}$ 。
 故答案为： $12\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】点与圆上一点间距离的最大、最小值

6. 2014年江苏南京溧水县初三中考一模第26题9分 ★★★★★

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转，得到 $\triangle A_1BC_1$ 。

(1) 如图1，当点 C_1 在线段 CA 的延长线上时，求 $\angle CC_1A_1$ 的度数。

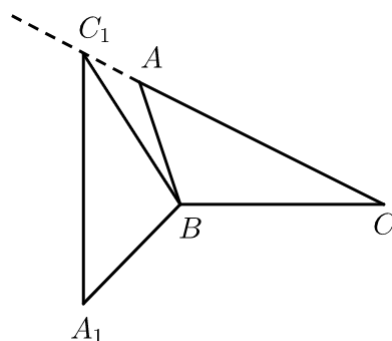


图1

(2) 如图2，连接 AA_1 ， CC_1 。若 $\triangle CBC_1$ 的面积为3，求 $\triangle ABA_1$ 的面积。

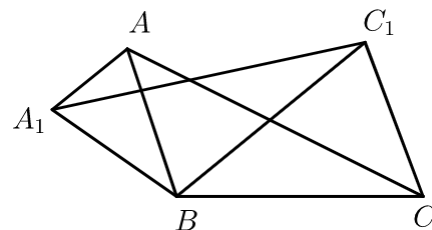


图2

- (3) 如图3, 点E为线段AB中点, 点P是线段AC上的动点, 在 $\triangle ABC$ 绕点B按逆时针方向旋转的过程中, 点P的对应点是点 P_1 , 直接写出线段 EP_1 长度的最大值与最小值.

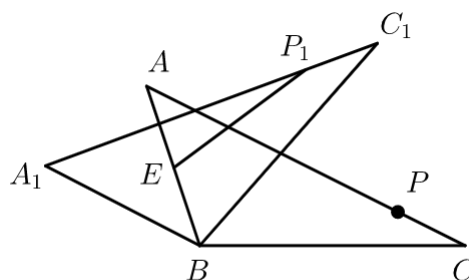


图3

【答案】 (1) $\angle CC_1A_1 = 60^\circ$.

(2) $S_{\triangle A_1BA} = \frac{4}{3}$.

(3) 线段 EP_1 长度的最大值为8, EP_1 长度的最小值1.

【解析】 (1) 如图1,

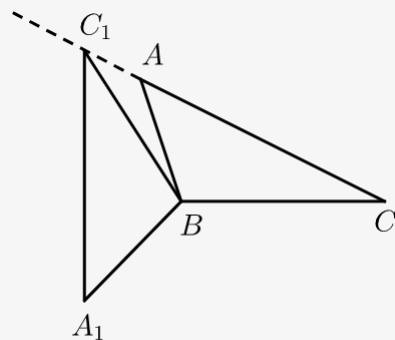


图1

依题意得: $\triangle A_1C_1B \cong \triangle ACB$.

$$\therefore BC_1 = BC, \angle A_1C_1B = \angle C = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle BC_1C = \angle C = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle CC_1A_1 = 60^\circ.$$

(2) 由(1)知: $\triangle A_1C_1B \cong \triangle ACB$.

$$\therefore A_1B = AB, BC_1 = BC, \angle A_1BC_1 = \angle ABC.$$

$$\therefore \angle A_1BC_1 = \angle C_1BC, \frac{A_1B}{C_1B} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

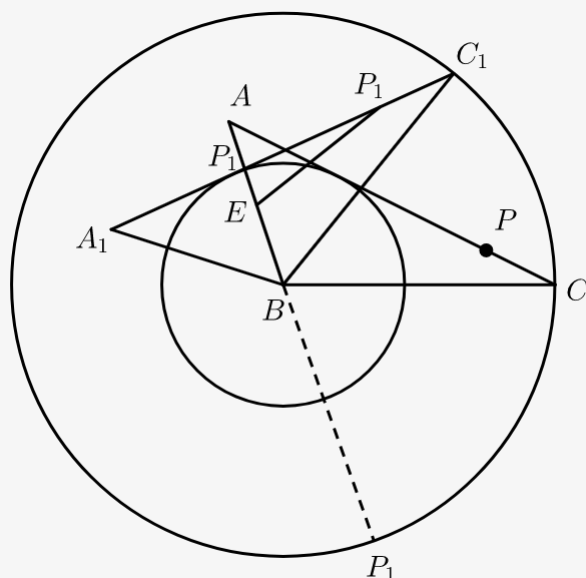
$$\therefore \triangle A_1BA \sim \triangle C_1BC.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle A_1BA}}{S_{\triangle C_1BC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

$$\therefore S_{\triangle C_1BC} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle A_1BA} = \frac{4}{3}.$$

(3) 方法一：依题可知，在 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转的过程中，点 P 的轨迹是以 B 为圆心， BP 长为半径的圆， $BP = BP_1$ ，



$$\therefore BP_1 - BE \leq EP_1 \leq BP_1 + BE,$$

当且仅当 $BP \perp AC$ 时， BP 有最小值， $BP_{\min} = \frac{1}{2}BC = 3$ ；

当点 P 与点 C 重合时， BP 有最大值， $BP_{\max} = BC = 6$ 。

$$\therefore 3 - 2 \leq EP_1 \leq 2 + 6,$$

$$\therefore 1 \leq EP_1 \leq 8.$$

方法二：线段 EP_1 长度的最大值为 8， EP_1 长度的最小值 1。

解题过程如下：①如图 a，过点 B 作 $BD \perp AC$ ， D 为垂足，

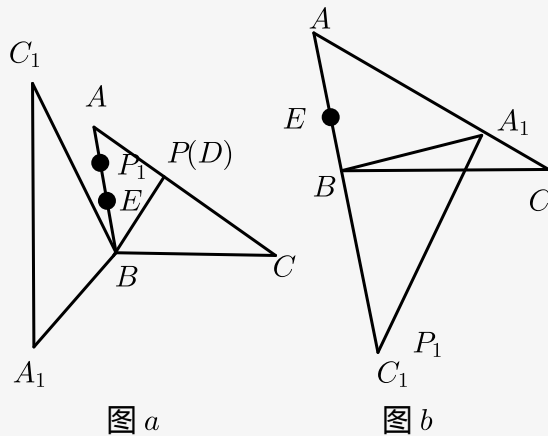
$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形，

$\therefore$ 点 D 在线段 AC 上，

$$\text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中， } BD = BC \times \sin 30^\circ = 6 \times \frac{1}{2} \times 3,$$

当 P 在 AC 上运动， BP 与 AC 垂直的时候， $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转，使点 P 的对应点 P_1 在线段 AB 上时， EP_1 最小，最小值为： $EP_1 = BP_1 - BE = BD - BE = 3 - 2 = 1$ ；

②当 P 在 AC 上运动至点 C ， $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转，使点 P 的对应点 P_1 在线段 AB 的延长线上时， EP_1 最大，最大值为： $EP_1 = BC + BE = 6 + 2 = 8$ 。



综上所述，线段 EP_1 长度的最大值为 8， EP_1 长度的最小值 1。

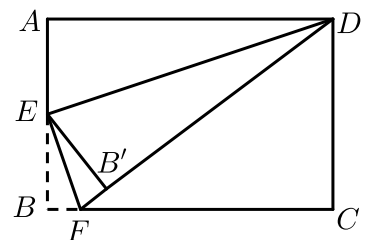
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

二、到某点定长问题

练习3

7. 2015年四川自贡中考真题第10题 ★★

如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 6$ ， E 是 AB 边的中点， F 是线段 BC 上的动点，将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle EB'F$ ，连接 $B'D$ ，则 $B'D$ 的最小值是（ ）。



A. $2\sqrt{10} - 2$

B. 6

C. $2\sqrt{13} - 2$

D. 4

【答案】A

【解析】如图，当点 B' 在 DE 上时，此时 $B'D$ 的值最小，

根据折叠的性质， $\triangle EBF \cong \triangle EB'F$ ，

$\therefore EB' = EB$ ，

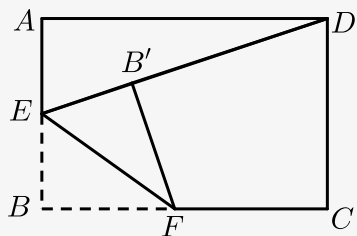
$\because E$ 是 AB 边的中点， $AB = 4$ ，

$\therefore AE = EB' = 2$ ，

$\because AD = 6$ ，

$\therefore DE = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ ，

$\therefore DB' = 2\sqrt{10} - 2$ 。



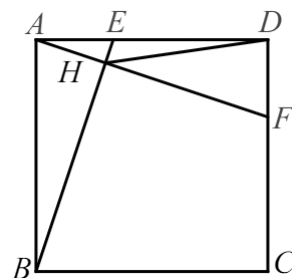
【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

三、定角问题

练习4

8. ★★★

如图，正方形 $ABCD$ 的边 AD 、 CD 上两个动点 E 、 F ，且满足 $AF = BE$ ， BE 交 AF 于点 H 。若正方形的边长为 4，线段 DH 最小值是 _____。



【答案】 $2\sqrt{5} - 2$

【解析】取 AB 的中点 O ，连接 OH 、 OD ，如图所示：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = DA$ ， $\angle BAE = \angle ADF = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BAE$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中， $\begin{cases} AD = AB \\ AF = BE \end{cases}$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle BAE \cong \text{Rt}\triangle ADF$ (SAS)，

$\therefore \angle ABE = \angle DAF$ ，

$\because \angle DAF + \angle BAF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE + \angle BAF = 90^\circ$ ，

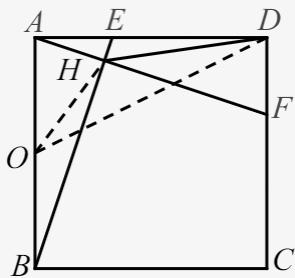
$\therefore \angle AHB = 90^\circ$ ，

$\therefore OH = \frac{1}{2}AB = 2$ ，

$\because OD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ，

当 O 、 D 、 H 三点重合时，在一条直线上时， DH 长度最小，

线段 DH 长度的最小值是： $2\sqrt{5} - 2$ 。



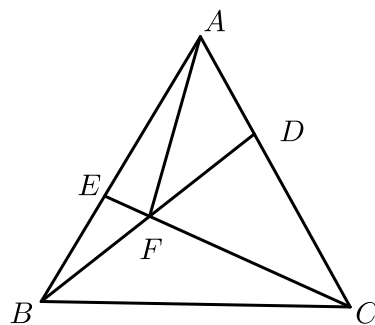
【标注】【知识点】圆内接四边形的性质定理

【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】正方形的性质

9. ★★

如图，已知在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = BC = 8$ ，点 D 、 E 分别是边 AC 、 AB 上两点，且 $AE = CD$ ， BD 交 CE 于 F ，连接 AF ，则 AF 的最小值为 _____。



【答案】 $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

【解析】 $\because \begin{cases} AE = CD \\ \angle EAC = \angle DCB \\ AC = BC \end{cases}$

$\therefore \triangle EAC \cong \triangle DCB (SAS)$,

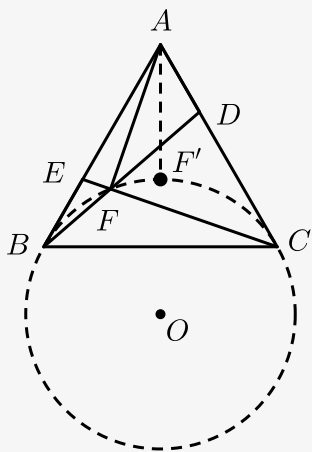
$\therefore \angle DBC = \angle ECA$,

$\therefore \angle BFC = 180^\circ - \angle FBC - \angle FCB = 180^\circ - \angle FCD - \angle FCB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

$\therefore B$ 、 F 、 C 三点共圆。

设圆心为 O ，则 $\angle BOC = 120^\circ$ ，

连接 AF' 交 $\odot O$ 于点 (F' 在 AO 中间)，



$$\text{则 } (AF)_{\min} = AF' = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

故答案为： $\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

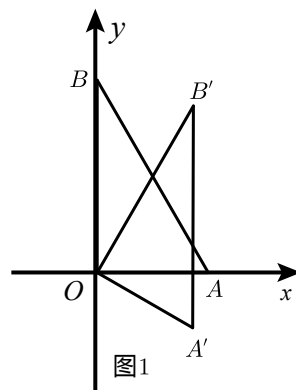
【标注】【能力】运算能力

【知识点】等边三角形的性质

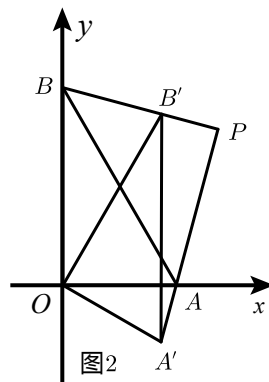
10. 2020~2021学年天津南开区天津市南开翔宇学校初三下学期开学考试第24题10分 ★★★

在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,0)$ ，点 $B(0,2\sqrt{3})$ ，点 $O(0,0)$ ， $\triangle AOB$ 绕着点 O 顺时针旋转，得到 $\triangle A'OB'$ ，点 A 、 B 旋转后的对应点为 A' 、 B' ，记旋转角为 α .

(1) 如图 1，若 $\alpha = 30^\circ$ ，求点 B' 的坐标 .



(2) 如图 2，若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，设直线 AA' 和直线 BB' 交于点 P ，求证： $AA' \perp BB'$.



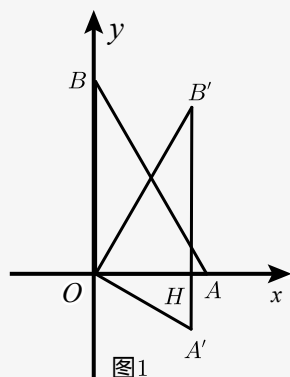
(3) 在 (2) 中的条件下，若 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ，点 $C(-2,0)$ ，求线段 CP 长度的取值范围 (直接写出结果即可) .

【答案】(1) 点 B' 的坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$.

(2) 证明见解析.

(3) $2\sqrt{3} - 2 \leq PC \leq 2\sqrt{3} + 2$.

【解析】(1) 如图 1, 设 $A'B'$ 与 x 轴交于点 H ,



$\because OA = 2, OB = 2\sqrt{3}, \angle AOB = 90^\circ,$

$\therefore \angle ABO = \angle B' = 30^\circ,$

$\because \angle BOB' = \alpha = 30^\circ,$

$\therefore BO \parallel A'B',$

$\because OB' = OB = 2\sqrt{3},$

$\therefore OH = \frac{1}{2}OB' = \sqrt{3}, B'H = 3,$

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$.

(2) $\because \angle BOB' = \angle AOA' = \alpha, OB = OB', OA = OA',$

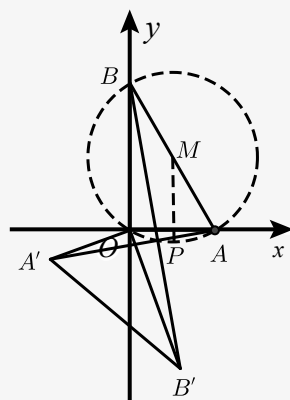
$\therefore \angle OBB' = \angle OA'A = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha),$

$\because \angle BOA' = 90^\circ + \alpha,$ 四边形 $OBPA'$ 的内角和为 $360^\circ,$

$\therefore \angle BPA' = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ,$

即 $AA' \perp BB'.$

(3) 如图, 作 AB 的中点 $M(1, \sqrt{3})$, 连接 $MP,$



$\because \angle APB = 90^\circ,$

$\therefore$ 点 P 的轨迹为以点 M 为圆心, 以 $MP = \frac{1}{2}AB = 2$ 为半径的圆, 除去点 $(2, 2\sqrt{3}),$

$\therefore CM - 2 \leq PC \leq CM + 2,$

$CM = \sqrt{(-2-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3},$

$$\therefore 2\sqrt{3} - 2 \leq PC \leq 2\sqrt{3} + 2.$$

【标注】【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题

11. 2018~2019学年10月天津和平区耀华嘉诚国际中学初三上学期月考第24题 ★★★

在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,0)$ ，点 $B(0,2\sqrt{3})$ ，点 $O(0,0)$ 。△ABC 绕着 O 顺时针旋转，得 △A'OB'，点 A 、 B 旋转后的对应点为 A' 、 B' ，记旋转角为 α 。

(1) 如图 1，若 $\alpha = 30^\circ$ ，求点 B' 的坐标。

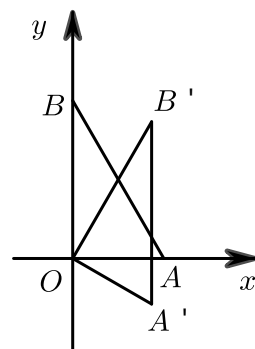


图 1

(2) 如图 2，若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，设直线 AA' 和直线 BB' 交于点 P ，求 $\angle BPA'$ 。

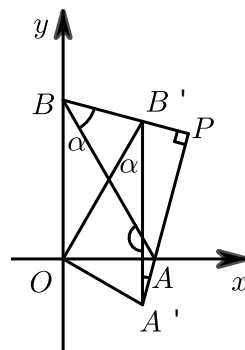


图 2

(3) 若 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ，求 (2) 中的点 P 纵坐标的最小值 (直接写出结果即可)。

【答案】 (1) $(\sqrt{3}, 3)$ 。

(2) $\angle BPA' = 90^\circ$ 。

(3) $\sqrt{3} - 2$ 。

【解析】 (1) 如图 3，设 $A'B'$ 与 x 轴交于点 H ，

$$\because OA = 2, OB = 2\sqrt{3}, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle B' = 30^\circ,$$

$$\because \angle BOB' = \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore BO \parallel A'B',$$

$$\because OB' = OB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OB' = \sqrt{3}, B'H = 3,$$

$$\therefore \text{点 } B' \text{ 的坐标为 } (\sqrt{3}, 3).$$

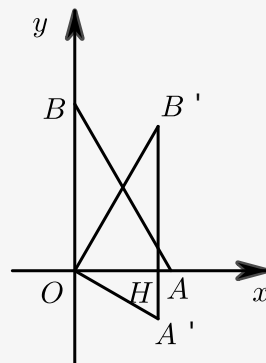


图 3

(2) $\because \angle BOB' = \angle AOA' = \alpha$, $OB = OB'$,

$$OA = OA',$$

$$\therefore \angle OBB' = \angle OAA' = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha),$$

$$\therefore \angle BOA' = 90^\circ + \alpha,$$

四边形 $OBPA'$ 的内角和为 360° ,

$$\therefore \angle BPA' = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ,$$

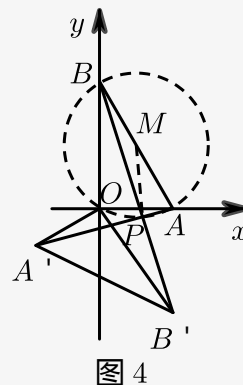
即 $AA' \perp BB'$, $\angle BPA' = 90^\circ$.

(3) 如图4, 作 AB 的中点 $M(1, \sqrt{3})$, 连接 MP ,

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 P 的轨迹为以点 M 为圆心, 以 $MP = \frac{1}{2}AB = 2$ 为半径的圆, 除去点 $(2, 2\sqrt{3})$,

$\therefore$ 点 $PM \perp x$ 轴时, 点 P 纵坐标的最小值为 $\sqrt{3} - 2$.



【标注】【知识点】坐标系中的旋转

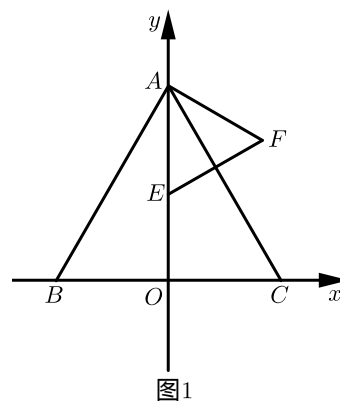
四、构造中位线问题

练习5

12. 2021年天津北辰区初三中考二模第24题10分 ★★★

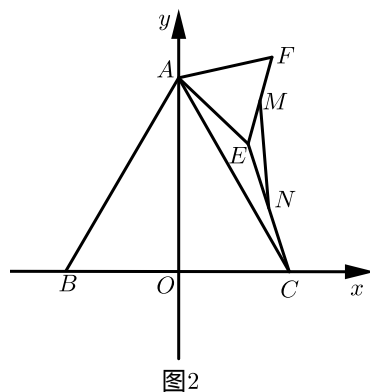
将等边三角形 ABC 如图放置在平面直角坐标系中, $AB = 8$, E 为线段 AO 的中点, 将线段 AE 绕点 A 逆时针旋转 60° 得线段 AF , 连接 EF .

(1) 如图1, 求点 E 的坐标.



(2) 在图1中, EF 与 AC 交于点 G , 连接 EC , N 为 EC 的中点, 连接 NG , 求线段 NG 的长. 请你补全图形, 并完成计算.

- (3) 如图 2 , 将 $\triangle AEF$ 绕点 A 逆时针旋转 , M 为线段 EF 的中点 , N 为线段 CE 的中点 , 连接 MN , 请直接写出在旋转过程中 MN 的取值范围 .



【答案】(1) $(0, 2\sqrt{3})$.

(2) 画图见解析 , $\sqrt{7}$.

(3) $4 - \sqrt{3} \leq MN \leq 4 + \sqrt{3}$.

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形 ,

$$\therefore AB = BC = AC = 8 .$$

$$\because AO \perp BC ,$$

$$\therefore BO = CO = 4 ,$$

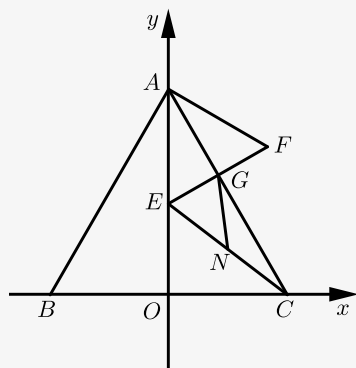
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABO \text{ 中 , } AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = 4\sqrt{3} .$$

$$\because E \text{ 为 } AO \text{ 的中点 ,}$$

$$\therefore AE = OE = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore E \text{ 点的坐标为 } (0, 2\sqrt{3}) .$$

(2) 补图如图所示 .



$$\because \triangle ABC \text{ 是等边三角形 , } AO \perp BC ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO = 30^\circ ,$$

$$\therefore \text{由旋转可知 , } AE = AF , \angle EAF = 60^\circ ,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 是等边三角形 ,}$$

$$\therefore \angle AEF = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle AGE = 90^\circ .$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EOC$ 中, $EC = \sqrt{OE^2 + OC^2} = 2\sqrt{7}$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EGC$ 中, N 为 EC 的中点,

$$\therefore GN = \frac{1}{2}EC = \sqrt{7}.$$

(3) 如图2, 连接 BE , CF .

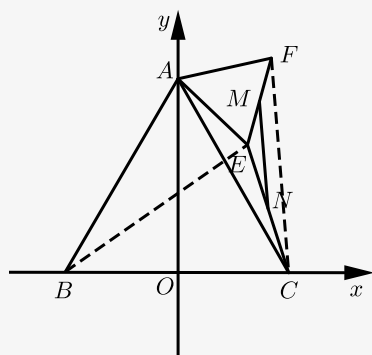


图2

由题知: $AB = AC$, $AE = AF$ 且 $\angle BAC = \angle EAF = 60^\circ$.

$\therefore \angle BAE = \angle BAC + \angle CAE$, $\angle CAF = \angle CAE + \angle EAF$,

$\therefore \angle BAE = \angle CAF$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF$,

$\therefore CF = BE$.

在 $\triangle CEF$ 中,

$\therefore M$ 为 EF 中点, N 为 CE 中点,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}CF,$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BE.$$

由题可知: 点 E 的运动轨迹是以 A 为圆心, AE 为半径的圆,

$\therefore$ 点 B 到点 E 的最大距离为: $BA + AE = 8 + 2\sqrt{3}$,

最小距离为: $BA - AE = 8 - 2\sqrt{3}$,

$\therefore MN$ 的取值范围是: $4 - \sqrt{3} \leq MN \leq 4 + \sqrt{3}$.

【标注】【知识点】旋转的性质

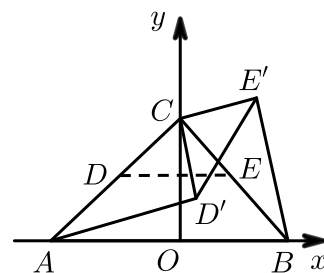
五、切线问题

练习6

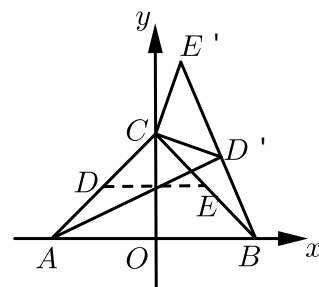
13. 2018年天津蓟县渔阳中学初三中考四模第24题10分 ★★★★★

在平面直角坐标系中, 点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$, 点 D , 点 E 分别是 AC , BC 的中点, 将 $\triangle CDE$ 绕点 C 逆时针旋转得到 $\triangle CD'E'$, 及旋转角为 α , 连接 AD' , BE' .

(1) 如图, 若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 当 $AD' \parallel CE'$ 时, 求 α 的大小.



(2) 如图, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 当点 D' 落在线段 BE' 上时, 求 $\sin \angle CBE'$ 的值.



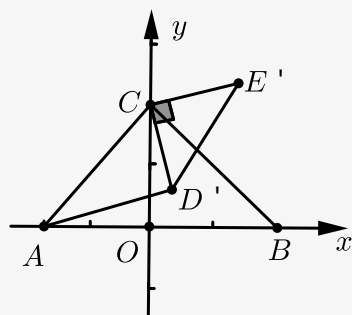
(3) 直线 AD' 与直线 BE' 相交于点 P , 求点 P 的横坐标 m 的取值范围 (直接写出结果即可)

【答案】 (1) $\alpha = 60^\circ$.

(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3) $-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$.

【解析】 (1) 如图,



$\because AD' \parallel CE'$,

$\therefore \angle AD'C = \angle E'CD' = 90^\circ$,

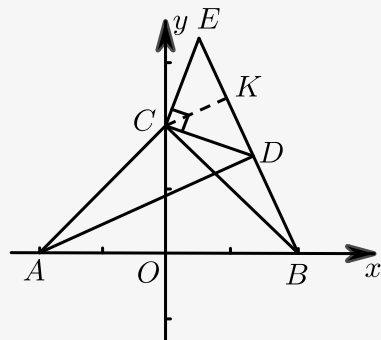
$\because AC = 2CD'$,

$\therefore \angle CAD' = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACD' = 90^\circ - \angle CAD' = 60^\circ$,

$\therefore \alpha = 60^\circ$.

(2) 如图, 做 $CK \perp BE'$ 于 K .



$$\because AC = BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \therefore CD' = CE' = \sqrt{2},$$

$$\because \triangle CD'E' \text{ 是等腰直角三角形, } CD' = CE' = \sqrt{2},$$

$$\therefore D'E' = 2,$$

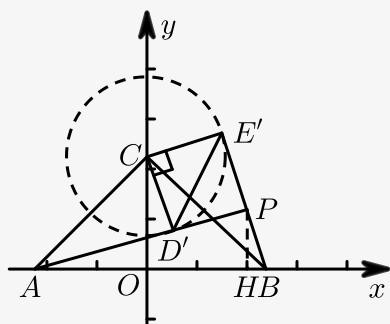
$$\because CK \perp D'E',$$

$$\therefore KD' = E'K,$$

$$\therefore CK = \frac{1}{2}D'E' = 1,$$

$$\therefore \sin \angle CBE' = \frac{CK}{BC} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(3) 如图, 以 C 为圆心 $\sqrt{2}$ 为半径作 $\odot C$, 当 BK' 与 $\odot C$ 相切时 AP 最长, 则四边形 $CD'PE'$ 是正方形, 作 $PH \perp AB$ 于 H .



$$\because AP = AD' + PD' = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

$$\because \cos \angle PAB = \frac{AP}{AB} = \frac{AH}{AP},$$

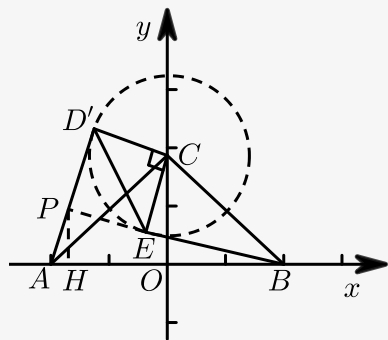
$$\therefore AH = 2 + \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 横坐标的最大值为 } \sqrt{3}.$$

如图: 当 BE' 与 $\odot C$ 相切时 AP 最短, 则四边形 $CD'PE'$ 正方形, 作 $PH \perp AB$ 于 H

根据对称性可知 $OH = \sqrt{3}$, $\therefore$ 点 P 横坐标的最小值为 $-\sqrt{3}$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 横坐标的取值范围为 } -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}.$$



【标注】【知识点】平行线的性质

【知识点】象限内坐标的特征

【知识点】坐标系中的旋转-图形关于原点的旋转

【知识点】等腰直角三角形的性质

【能力】推理论证能力

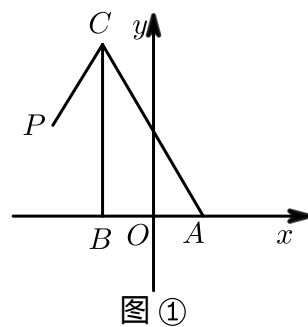
六、面积最值问题

练习7

14. 2020年天津和平区初三中考二模第24题10分 ★★★

在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 60^\circ$ ，点 $O(0,0)$ ，点 $A(1,0)$ ，点 $B(-1,0)$ ，点 C 在第二象限，点 $P(-2, \sqrt{3})$ 。

(1) 如图①，求 C 点坐标及 $\angle PCB$ 的大小。



(2) 将 $\triangle ABC$ 绕 C 点逆时针旋转得到 $\triangle MNC$ ，点 A ， B 的对应点分别为点 M ， N ， S 为 $\triangle PMN$ 的面积。

① 如图②，当点 N 落在边 CA 上时，求 S 的值；

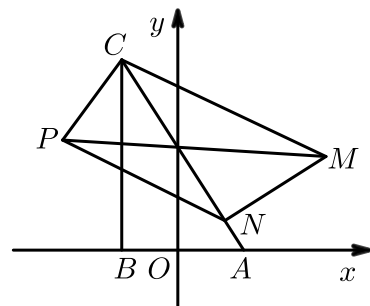


图 ②

② 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可) .

【答案】 (1) $C(-1, 2\sqrt{3})$, $\angle PCB = 30^\circ$.

(2) ① $2\sqrt{3} - 1$.

② $2\sqrt{3} - 2 \leq S \leq 2\sqrt{3} + 2$.

【解析】 (1) $\because$ 点 $A(1, 0)$, 点 $B(-1, 0)$,

$$\therefore OA = 1, OB = 1,$$

$$\therefore AB = 2,$$

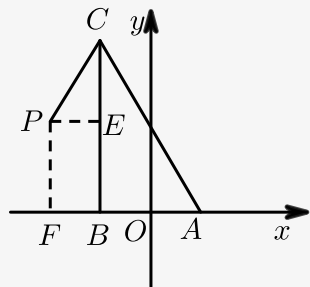
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 60^\circ$,

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore BC = AB \cdot \tan 60^\circ = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore C(-1, 2\sqrt{3}),$$

过点 P 作 $PE \perp CB$, 垂足为点 E , 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴, 垂足为点 F ,



可证得四边形 $PFBE$ 是矩形 ,

$$\therefore P(-2, \sqrt{3}),$$

$$\therefore OF = 2, PF = \sqrt{3},$$

$$\therefore FB = OF - OB = 1,$$

$$\therefore BE = PF = \sqrt{3}, PE = FB = 1,$$

$$\therefore CE = CB - BE = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle CPE$ 中,

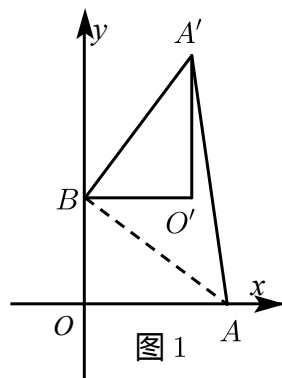
$$\therefore \tan \angle PCE = \frac{PE}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle PCB = 30^\circ.$$

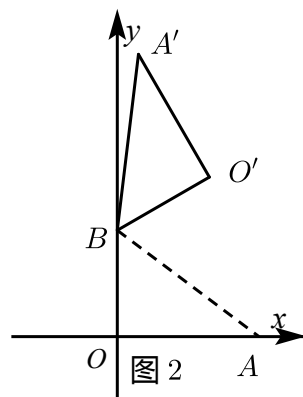
(2) ① 过点 P 作 $PH \perp$ 直线 MN , 垂足为点 H , 过点 P 作 $PG \perp AC$, 垂足为点 G ,

在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(4,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转，得 $\triangle A'BO'$ ，点 A ， O 旋转后的对应点为 A' ， O' ．记旋转角为 α ．

(1) 如图1，若 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AA' 的长．



(2) 如图2，若 $\alpha = 120^\circ$ ，求点 O' 的坐标．



(3) 记 K 为 AB 的中点， S 为 $\triangle KA'O'$ 的面积，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）．

【答案】 (1) $AA' = 5\sqrt{2}$.

(2) $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{9}{2})$.

(3) $1 \leq S \leq 11$.

【解析】 (1) $\because$ 点 $A(4,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，

$\therefore OA = 4$ ， $OB = 3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中，由勾股定理得， $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$ ，

根据题意， $\triangle A'B'O'$ 是 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到的．

由旋转的性质，可得 $\angle A'BA = 90^\circ$ ， $A'B = AB = 5$ ．

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle A'BA$ 中， $AA' = \sqrt{A'B^2 + AB^2} = 5\sqrt{2}$ ．

(2) 如图，根据题意，

由旋转的性质，可得 $\angle O'BO = 120^\circ$ ， $O'B = OB = 3$ ．

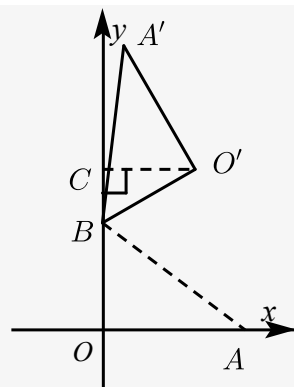
过点 O' 作 $O'C \perp y$ 轴，

垂足为 C ，则 $\angle O'CB = 90^\circ$ ．

在 $\text{Rt}\triangle O'CB$ 中，由 $\angle O'BC = 180^\circ - \angle O'BD = 60^\circ$ ，得 $\angle C'O'B = 30^\circ$ ．

$\therefore CB = \frac{1}{2}O'B$ ， $O'C^2 + CB^2 = O'B^2$ ．

$$\begin{aligned}\therefore O'C &= \frac{\sqrt{3}}{2} O'B = \frac{3}{2} \sqrt{3}, \quad BC = \frac{3}{2} . \\ \therefore OC &= OB + BC = \frac{9}{2} . \\ \therefore \text{点 } O' \text{ 的坐标为 } & \left(\frac{3}{2} \sqrt{3}, \frac{9}{2} \right) .\end{aligned}$$



- (3) 相对运动：当两个动点（或者动图）或者一个动点（动图）一个定点，他们两点之间没有关联时，可以假设期中一个静止，另一个运动可以更好的解决问题，此题原先是 $A'O'$ 动， K 不动，因为之间没有关联，可以假设 $A'O'$ 不动，点 K 动，可知 K 的运动轨迹为：以 B 为圆心， BK 为半径的圆，由题意知，当运动到 K_1 时， $\triangle KA'O'$ 的面积最小。当运动到 K_2 时， $\triangle KA'O'$ 的面积最大。

$$\because \text{点 } A(4, 0), \text{ 点 } B(0, 3) .$$

$$\therefore OA = 4, \quad OB = 3 ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 .$$

$$\because K \text{ 为 } AB \text{ 的中点} ,$$

$$\therefore BK = \frac{5}{2} .$$

$$\text{当运动到 } K_1 \text{ 时} , \quad O'B = OB = 3, \quad O'A' = OA = 4 ,$$

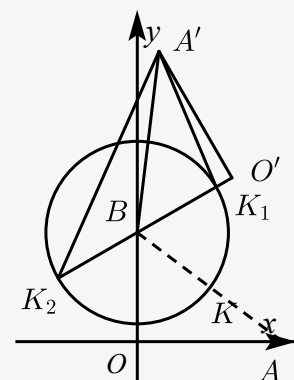
$$\therefore O'K_1 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} .$$

$$\therefore S_{\triangle KA'O'} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} = 1 .$$

$$\text{当运动到 } K_2 \text{ 时} , \quad O'K_2 = \frac{5}{2} + 3 = \frac{11}{2} .$$

$$\therefore S_{\triangle KA'O'} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{11}{2} = 11 .$$

$$\text{综上} , \quad S \text{ 的取值范围是 } 1 \leq S \leq 11 .$$



【标注】【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题